



Wydziałowa

Liga

Matematyczna

I W L M – Z E S T A W B

- B1.** Ciąg $(r_n)_{n=3}^{\infty}$ określamy następująco: $r_3 = 1$, zaś dla $n \geq 3$ liczba r_{n+1} jest promieniem okręgu wpisanego w n -kąt foremny, który jest wpisany w okrąg o promieniu r_n . Rozstrzygnąć, czy granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$$

jest liczbą dodatnią.

- B2.** Dla danej funkcji f nazwijmy zbiór A zawarty w dziedzinie f *stałym*, jeśli jego obraz $f(A)$ jest równy jemu samemu. Wykazać, że liczba zbiorów stałych każdej funkcji

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

jest potęgą dwójki.

- B3.** Niech A_n oznacza pierwszą cyfrę zapisu dziesiętnego liczby n^n . Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba N , że

$$A_{N+1} = A_{N+2} = A_{N+3} = \dots = A_{N+2018}.$$

- B4.** Rozważmy funkcję F , która każdemu podzbirowi zbioru $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ przypisuje 0 lub 1, spełniając przy tym warunki

$$F(\emptyset) = 0, \quad F([n]) = 1, \quad A \subseteq B \Rightarrow F(A) \leq F(B) \text{ dla wszystkich } A, B \subseteq [n].$$

- (a) Wykazać, że istnieje funkcja $f : [n] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, która dla każdego $A \subseteq [n]$ spełnia warunki

$$\sum_{a \in A} f(a) \geq 1 \text{ dla } F(A) = 1,$$

$$\sum_{a \in A} f(a) \leq \frac{1}{3}n \text{ dla } F(A) = 0.$$

- (b) Udowodnić, że stałej $\frac{1}{3}$ w punkcie (a) nie można w ogólnym przypadku zastąpić liczbą mniejszą od $\frac{1}{4}$.

- Konkurs przeznaczony jest dla studentów WMI UAM i ma charakter nieformalny.
- Rozwiązania powyższych zadań, każde na oddzielnym arkuszu, można oddawać

do końca lutego 2018r.

Prace należy zostawić w portierni B, w skrzynce dra Bartłomieja Bzdęgi.

- Jest to drugi z trzech zestawów zadań. Pod koniec lutego na stronie internetowej

wlms.wmi.amu.edu.pl

będzie można znaleźć ostatni. Na początku marca opublikujemy aktualny ranking uczestników.

- Rozwiązania zadań zostaną omówione w ramach zajęć Koła Naukowego Matematyków UAM, w terminie, który podamy później.
-